Colle du 17/06 - Sujet 1
Géométrie et révisions

Exercice 1. On note E l'ensemble des suites réelles bornées. Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k \,\mathrm{e}^{-k}, \end{array}$$

est un produit scalaire.

Exercice 2. Dans l'espace, on considère $\mathcal{A} : \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + z^2 - 4y = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{B} : \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$.

1. Reconnaitre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont contenus dans une sphère dont on déterminera les caractéristiques.

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

1. Simplifier f à l'aide de sa dérivée.
2. Retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode.

Colle du 17/06 - Sujet 2
Géométrie et révisions

Exercice 1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$.

Exercice 2. On considère les plans

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: ax + y + z + 1 = 0 \\ \mathcal{P}_2 &: x + ay + z + a = 0 \\ \mathcal{P}_3 &: x + y + az + b = 0 \end{aligned}$$

Déterminer les réels a et b pour que l'intersection de ces trois plans soient une droite. Préciser dans ce cas l'équation cartésienne et paramétrique de la droite.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = a$.
2. La fonction f est-elle bornée ?

Colle du 17/06 - Sujet 3
Géométrie et révisions

Exercice 1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ a & 0 & -1 & -1 \\ a & a & 0 & -1 \\ a & a & a & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 2. On considère $\mathcal{D} : \begin{cases} x - z - 4 = 0 \\ x + y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$, $c \in \mathbb{R}$, $\Omega\,(0, 1, c)$ et $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

1. Calculer la distance de Ω à $\mathcal{D}$.
2. Préciser $\mathcal{C}$.
3. Montrer que Ω est sur l'axe de $\mathcal{C}$.
4. Soit $\mathcal{S}$ la sphère contenant $\mathcal{C}$ de centre Ω. Déterminer son rayon.
5. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles $\mathcal{S}$ est tangente à $\mathcal{D}$ et préciser alors le plan tangent à la sphère dans ces cas.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances de A. La matrice A est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.